放物型ベルグマン空間上の作用素について (ポテンシャル論とベルグマン核)

西尾, 昌治; 鈴木, 紀明; 山田, 雅博

数理解析研究所講究録
第 1694 巻 2010 年 101-120

放物型ベルグマン空間上の作用素について

大阪市立大学・理学研究科　西尾 昌治 (Masaharu NISHIO)
Department of Mathematics, Osaka City University

名城大学・理工学部　鈴木 紀明 (Noriaki SUZUKI)
Department of Mathematics, Meijo University

岐阜大学・教育学部　山田 雅博 (Masahiro YAMADA)
Department of Mathematics, Gifu University

要旨

上半空間上の放物型方程式 $(\partial/\partial t+(-\Delta_x)^{\alpha})u=0$ $(0<\alpha\leq 1)$ を考え，その解で p 乗可積分なもの全体を放物型ベルグマン空間とよぶ．本稿では，その空間上に自然にあらわれる射影作用素やトエプリッツ作用素，およびその解析に不可欠なベレジン変換や平均作用素といった種々の作用素の性質，特に，有界性やコンパクト性をとりあつかう．それには対応するベルグマン核の評価，特にその境界挙動が重要であるが，ここでは方程式の斉次性に着目する．そして，それを積極的に利用することで，見通しのよい議論が期待できることを解説する．

1 序

上半空間 $\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}=\boldsymbol{R}^{n}\times(0,\infty)$ 上の放物型作用素

$$L^{(\alpha)}:=\frac{\partial}{\partial t}+(-\Delta_{x})^{\alpha}$$

を考える．次数 α の条件 $0<\alpha\leq 1$ は，ポテンシャル論からの要請である．そして，考察の対象となる Bergman 空間は

$$\boldsymbol{b}_{\alpha}^{p}:=\{u\in C(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1});L^{(\alpha)}u=0\}\cap L^{p}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V)$$

である．ここで，指数 p は $1\leq p\leq\infty$ で，V は $(n+1)$-次元のルベーグ測度である．集合 $\{u\in C(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1});L^{(\alpha)}u=0\}$ に属する関数を α-放物型関数あるいは $L^{(\alpha)}$-調和関数とよぶ．方程式 $L^{(\alpha)}u=0$ は §2 で説明するように弱解を考えるが，ポテンシャル

論的に掃散測度を用いた平均値の性質によって定義することもできる ([10] あるいは [8] を参照). また, $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ は Banach 空間, したがって特に, $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ は Hilbert 空間である. $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ への直交射影は積分作用素で表される. その積分核を記号 R_α で表し, 放物型 Bergman 核とよぶ. その核を用いて, $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^q$ への Toeplitz 作用素

$$(T_\mu u)(X) = (T_{\mu,p,q}u)(X) := \int R_\alpha(X,Y)u(Y)d\mu(Y)$$

が考えられる. ここでは, 表象 μ が上半空間上の正測度の場合を考える. 以下, 単に測度といえば, Radon 測度であるとする.

古典的な設定では, Toeplitz 作用素は複素平面の単位円板 $\boldsymbol{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\boldsymbol{D})$ において定義された. このとき表象 ϕ は単位円周 $\partial\boldsymbol{D}$ 上の有界可測関数で, $L^2(\partial\boldsymbol{D})$ からの Szegö 射影 P を用いて $T_\phi u := P(\phi u)$ で定義される. その類似として Szegö 射影のかわりに $L^2(\boldsymbol{D})$ からの Bergman 射影 R を用いて Bergman 空間 $B^2(\boldsymbol{D})$ 上の Toeplitz 作用素 $T_\phi u := R(\phi u)$ が定義された ([5]). この場合表象 ϕ は有界関数である必要はない. したがって, 自然に Toeplitz 作用素の表象は測度に拡張される. さらに超関数を表象とすることも考えられる ([16]).

定義 1. 次の関数をそれぞれ μ の平均関数および Berezin 変換とよぶ:

$$\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \mu(Q^{(\alpha)}(Y))/V(Q^{(\alpha)}(Y));$$
$$\tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \int R_\alpha(X,Y)^2 d\mu(X) \Big/ \int R_\alpha(X,Y)^2 d\mu(X).$$

ここで, $Q^{(\alpha)}(Y)$ は次で定義される α-放物型 Carleson 箱である:

$$Q^{(\alpha)}(Y) := \{(x_1,\cdots,x_n,t);\ s \le t \le 2s, |x_j - y_j| \le 2^{-1}s^{1/2\alpha}, j = 1,\cdots,n\}. \tag{1}$$

上で定義される補助関数は Toeplitz 作用素の研究に, 非常に有効である. 例えば, $p \le q$ の場合には, 次のような特徴付けがある ([9], [11]).

定理 1. $1 < p \le q < \infty$ とし, $\tau = \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q}$ とおく. 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の測度 μ は, ある $\eta \in \boldsymbol{R}$ に対し, 次の増大条件をみたすとする:

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^\eta \, d\mu(x,t) < \infty. \tag{2}$$

そのとき, 以下は同値である:

(i) $T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \longrightarrow \boldsymbol{b}_\alpha^q$ は有界作用素である;

(ii) $(x,t) \mapsto t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\hat{\mu}^{(\alpha)}(x,t) \in L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$;

(iii) $(x,t) \mapsto t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\tilde{\mu}^{(\alpha)}(x,t) \in L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$.

そのとき, 作用素ノルム $\|T_{\mu,p,q}\|$ は L^∞-ノルム $\|t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)}$ および $\|t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\tilde{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)}$ と比較可能である.

定理 **2.** 上と同じ設定のもと, 以下は同値である:

(i) $T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \longrightarrow \boldsymbol{b}_\alpha^q$ はコンパクト作用素である;

(ii) $(x,t) \mapsto t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\hat{\mu}^{(\alpha)}(x,t) \in L_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$;

(iii) $(x,t) \mapsto t^{(1-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\tilde{\mu}^{(\alpha)}(x,t) \in L_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$.

ここで, $L_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ は $\{f \in L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V); \mathrm{supp}\, f$ がコンパクト$\}$ の $L^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ における閉包を表す.

この小論では, $q < p$ の場合の Toeplitz 作用素への応用を視野にいれながら, 上の平均関数や Berezin 変換の一般化やそれらの関係について考察する. 技術的なことになるが, われわれの設定では $0 < \alpha < 1$ のときには作用素 $L^{(\alpha)}$ は非局所的になるので, 解には局所的な平均値の性質が期待できない. そこでここでは, 作用素の斉次性に着目して, 放物的相似変換を導入する. 次の関係は容易に示される (§3).

定理 **3.** $1 < \sigma \leq \infty$ とする. 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の測度 $\mu \geq 0$ に対し, $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ と $\tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ は同値である.

また, 重みつきノルム不等式も考察するが, 重みが $l := -(\frac{n}{2\alpha}+1)$ のときが特に重要である. というのは, それに対応する測度

$$dV_l(x,t) = t^l dV(x,t)$$

は放物的相似変換に関する不変測度であるからである (§3). ここでは, 次の定理をあげるにとどめるが, そこから Schatten 族の Toeplitz 作用素の考察に発展していく ([13]).

定理 **4.** $1 \leq \sigma < \infty, 1 < p < \infty$ とする. 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の測度 $\mu \geq 0$ に対し, $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)$ であること $\tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)$ であることは同値である. さらにそのとき, 対応する *Toeplitz* 作用素 $T_\mu = T_{\mu,p,p}$ はコンパクトである.

注意 **1.** 本論では, 重要でない正定数はすべて同じ文字 C で表すことにする. 同一の行でもその値は変わりうることに注意する.

2 準備

本節では, 準備として $L^{(\alpha)}$-調和関数の定義を述べた後, 放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ の斉次性および評価について復習し, 再生核に関する基本的性質をまとめる.

2.1 $L^{(\alpha)}$-調和関数. ここでは, 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ に限って $L^{(\alpha)}$-調和関数の定義を述べる. 一般の開集合上の $L^{(\alpha)}$-調和関数に関しては [8] あるいは [10] を参照.

まず, 試験関数の空間, 台がコンパクトな C^∞ 関数全体 $C_c^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ への共役作用素 $(L^{(\alpha)})^* = -\partial/\partial t + (-\Delta_x)^\alpha$ の作用であるが, $(-\Delta_x)^\alpha$ は $0 < \alpha < 1$ のときは, $-c_{n,\alpha}\mathrm{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$ による合成積作用素である. ここで, p.f. は有限部分で係数は

$$-c_{n,\alpha} := 4^\alpha \pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha) < 0$$

である. したがって具体的には $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ に対し,

$$\left(L^{(\alpha)}\right)^*\varphi(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) - c_{n,\alpha}\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|y|>\delta}(\varphi(x+y,t)-\varphi(x,t))|y|^{-n-2\alpha}\,dy$$

となる. その増大度は supp $(\varphi) \subset \{|x| < r,\ t_1 < t < t_2\}$ とすれば, $|x| \geq 2r$ となる (x,t) に対し,

$$\left|\left(L^{(\alpha)}\right)^*\varphi(x,t)\right| \leq 2^{n+2\alpha}c_{n,\alpha}\left(\sup_{t_1<s<t_2}\int_{\boldsymbol{R}^n}|\varphi(y,s)|\,dy\right)\cdot|x|^{-n-2\alpha} \tag{3}$$

である.

定義 2. $0 < \alpha \leq 1$ に対し, 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和 (あるいは α-放物的) であるとは, 任意の試験関数 $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ に対し, $\iint u\cdot\left(L^{(\alpha)}\right)^*\varphi\,dV = 0$ が成立することである.

注意 2. 上の定義の可積分条件から (3) によって, $u \in C(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ が $L^{(\alpha)}$-調和ならば, 任意の $0 < t_1 < t_2 < \infty$ に対し,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x,t)|\cdot|x|^{-n-2\alpha}\,dxdt < \infty$$

でなければならない.

2.2 基本解と再生核. ここでは, $L^{(\alpha)}$ の基本解として, 次のフーリエ変換で定義されるものを採用する:

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-t|\xi|^{2\alpha}+\sqrt{-1}\,x\cdot\xi)d\xi & t>0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

$\alpha = 1$ または $\alpha = 1/2$ のときは, 明示的に

$$W^{(1)}(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad W^{(1/2)}(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (t>0)$$

と表される. 一般の場合は具体的な形のかわりに次の斉次性と増大評価を用いて議論する. ここで, $\boldsymbol{N}_0 := \{0\} \cup \boldsymbol{N}$ とおく.

補題 1. **([9, Lemma 1])** 多重添字 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \boldsymbol{N}_0^n$ と $k \in \boldsymbol{N}_0$, $s > 0$, $(x,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ に対し, 次がなりたつ:

(i)

$$\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(s^{\frac{1}{2\alpha}} x, st) = s^{-(\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+k)} (\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)})(x,t); \tag{4}$$

(ii)

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)| \le C\left(t+|x|^{2\alpha}\right)^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-k}.$$

放物型 Bergman 核は基本解を用いて,

$$R_\alpha(x,t;y,s) = -2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y, t+s)$$

と表される ([6]). また, それを変数 s で微分したもの

$$R_\alpha^m(x,t;y,s) := \frac{(-2)^m}{m!} s^m \partial_s^m R_\alpha(x,t;y,s) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} s^m \partial_t^{m+1} W^{(\alpha)}(x-y, t+s)$$

も再生性をもつ. すなわち, $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ $(1 \le p < \infty)$, $m \in \boldsymbol{N}_0$ に対し,

$$u(X) = R_\alpha^m u(X) := \int R_\alpha^m(X,Y) u(Y) dV(Y) \tag{5}$$

がなりたつ ([6]). R_α^m をここでは修正 Bergman 核とよぶが, 定義からわかるように, 重み付きの放物型 Bergman 空間と関連している ([3]). また, 再生性は期待できないが, [12] にしたがって $(\beta, m) \in \boldsymbol{N}_0^n \times \boldsymbol{N}_0$ に対し,

$$R_\alpha^{\beta,m}(X,Y) := c_{\beta,m} s^{(\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} \partial_y^\beta \partial_s^m R_\alpha(X,Y)$$

とおく. ここで, $c_{\beta,m} = (-1)^{|\beta|}(-2)^m/m!$ である. 補題 1 の (ii) から $R_\alpha^{\beta,m}$ の増大評価

$$|R_\alpha^{\beta,m}(x,t;y,s)| \le C s^{(\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} \left(t+s+|x-y|^{2\alpha}\right)^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} \tag{6}$$

が得られる. ここで (6) の可積分性について注意する.

補題 2. $\gamma, \eta \in \boldsymbol{R}$ が $-1 < \gamma < \eta - (\frac{n}{2\alpha} + 1)$ をみたせば,

$$\int t^{\gamma}(t + s + |x - y|^{2\alpha})^{-\eta} dV(x,t) = Cs^{\gamma - \eta + \frac{n}{2\alpha} + 1}$$

がなりたつ. ここで, $C > 0$ は $(y,s) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ によらない定数である.

したがって, もし $\frac{|\beta|}{2\alpha} + m > \left(\frac{n}{2\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right)$ ならば, $Y = (y,s) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ に対し, $R_\alpha^{\beta,m}(\,\cdot\,, Y) \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ で, そのノルムは

$$\|R_\alpha^{\beta,m}(\,\cdot\,, Y)\|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)} = Cs^{(\frac{n}{2\alpha}+1)(\frac{1}{p}-1)} \tag{7}$$

となる. もちろん, 定数 C は Y によらない.

3　α-放物的相似変換と平均作用素

本節では, 方程式の斉次性に適合した相似変換を導入し, 平均作用素を一般化する.

定義 3. $t > 0$ に対し, 写像 $\tau_t^{(\alpha)} : (y,s) \mapsto (t^{\frac{1}{2\alpha}} y, ts)$ を α-放物的拡大とよぶ. また, α-放物的拡大と平行移動との合成を α-放物的相似変換とよぶ.

明らかに, 方程式 $L^{(\alpha)}u = 0$ は, α-放物的相似変換で不変である. 参照点として $X_0 = (0,1) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ をとり固定する. すると各 $X = (x,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ に対し, α-放物的相似変換 Φ_X で参照点 X_0 を X に移す上半空間上の全単射がただ一つ存在する:

$$\Phi_{(x,t)}(y,s) = (t^{1/2\alpha} y + x, ts).$$

ここで, 上半空間における積 $X \cdot Y$ を

$$\Phi_X \Phi_Y = \Phi_{(X \cdot Y)}$$

で定義する. すると明らかに, $X \cdot Y = \Phi_X(Y)$ で $(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, \,\cdot\,) = (\boldsymbol{R}^n, +) \rtimes (\boldsymbol{R}_+, \times)$ になる. すなわち, 放物的相似変換全体は, 変換群として x-軸方向の平行移動と放物的拡大の半直積である. ここで, 簡単な性質をあげておく.

補題 3. (i) $dV_l(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} dV(X)$ は左不変測度である $(l := -(\frac{n}{2\alpha} + 1))$.

(ii) $dV_r := t^{-1} dV(X)$ は右不変測度である $(r := -1)$.

(iii) $dV_i(X) := t^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{2\alpha}+1)-1} dV(X)$ は $X \mapsto X^{-1}$ で不変な測度である $(i := -\frac{1}{2}(\frac{n}{2\alpha} + 1) - 1)$.

(iv) 単位元は X_0 で, $X^{-1} = (-t^{-1/2\alpha} x, t^{-1})$, $X \cdot Y^{-1} = (x - t^{\frac{1}{2\alpha}} s^{-\frac{1}{2\alpha}} y, ts^{-1})$.

(v) $g_\alpha := t^{-1/\alpha}|dx|^2 + t^{-2}dt^2$ は左不変なリーマン計量で，上半空間に α-放物的相似変換のもとでの一様位相を与える．

今，上半空間上の測度 ρ と関数 f に対し，

$$\mathcal{I}_\rho f(X) := \int f\, d(\Phi_{X*}\rho) = \int f(X\cdot Y)d\rho(Y) \tag{8}$$

とおく．ここで，$\Phi_{X*}\rho$ は ρ の Φ_X による像測度である．また，測度 ρ が V に対し，絶対連続

$$d\rho(X) = \rho(X)dV(X)$$

であるときには測度 μ に対し，

$$\mathcal{I}_\rho\mu(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}\int \rho(X^{-1}\cdot Y)d\mu(Y) \tag{9}$$

とおく．ρ が絶対連続な確率測度であるときには，$\mathcal{I}_\rho$ を ρ による (一般化された) 平均作用素とよぶ．一般には $\mathcal{I}_\rho$ を α-放物的積分作用素とよぶ．

注意 3. 容易にわかるようにもともとの平均作用素や Berezin 変換は

$$\hat{a}(X) = 1_{Q^{(\alpha)}(X_0)}(X),$$
$$\tilde{b}(X) = R_\alpha(X, X_0)^2 \Big/ \int R_\alpha(Y, X_0)^2 dV(Y)$$

を用いて次のように一般化された平均作用素として表される:

$$\hat{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\hat{a}}\mu, \quad \tilde{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\tilde{b}}\mu.$$

次の補題は Minkowski の不等式からただちに従う．

補題 4. ρ を上半空間上の測度とする．$1 \le p \le \infty$ に対し，ノルム不等式

$$\|\mathcal{I}_\rho f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V)} \le \left(\int t^{-1/p}\, d|\rho|(X)\right)\|f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V)}$$

がなりたつ．

上の補題から次の平均作用素の有界性がわかる．

補題 5. 上半空間上の相対コンパクト開集合 $U \neq \emptyset$ に対し，$u := \frac{1}{|U|}1_U$ とおく．そのとき，$1 \le p \le \infty$ に対し次は有界である:

(1) $\hat{A}_U := \mathcal{I}_u : L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V) \to L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V)$;

(2) $\hat{A} := \mathcal{I}_{\hat{a}} : L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V) \to L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$.

また, Berezin 変換に対しては次がなりたつ.

補題 6. 関数

$$\bar{b}(x,t) := (1 + t + |x|^{2\alpha})^{-2(\frac{n}{2\alpha}+1)}$$

を考えると, $1 < p \leq \infty$ に対し次は有界である:

(1) $\overline{B} := \mathcal{I}_{\bar{b}} : L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V) \to L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$;

(2) $\tilde{B} := \mathcal{I}_{\tilde{b}} : L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V) \to L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$.

補題 5 を用いれば次は明らかである.

命題 1. $1 \leq \sigma \leq \infty$ とする. 上半空間上の測度 $\mu \geq 0$ に対し, 次は同値である:

(i) $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$;

(ii) 上半空間上のある相対コンパクト開集合 $U \neq \emptyset$ に対し, $\hat{A}_U\mu \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$;

(iii) 上半空間上の任意の相対コンパクト開集合 $U \neq \emptyset$ に対し, $\hat{A}_U\mu \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$.

次に合成積を定義する.

定義 4. 上半空間上の測度 ρ_1, ρ_2 に対し. 合成積 $\rho_1 * \rho_2$ は次で定義される測度である:

$$\int f\, d(\rho_1 * \rho_2) := \iint f(X \cdot Y)\, d\rho_1(X) d\rho_2(Y).$$

注意 4. (1) 関数 f に対し, $\mathcal{I}_{\rho_1}\mathcal{I}_{\rho_2} f = \mathcal{I}_{\rho_1 * \rho_2} f$ となる. また, ρ_2 が dV に対して絶対連続であれば, 測度 μ に対し, $\mathcal{I}_{\rho_1}\mathcal{I}_{\rho_2}\mu = \mathcal{I}_{\rho_1 * \rho_2}\mu$ となる.

(2) 測度 ρ_1, ρ_2 がともに絶対連続であれば, $\rho_1 * \rho_2$ も絶対連続で, その密度関数は

$$\rho_1 * \rho_2(X) = \int \rho_1(Y)\, \rho_2(Y^{-1} \cdot X)\, s^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} dV(Y) \tag{10}$$

$$= \int \rho_1(X \cdot Y^{-1})\, \rho_2(Y)\, s^{-1} dV(Y). \tag{11}$$

で与えられる.

(10), (11) に自然に不変測度 V_l, V_r があらわれるのは興味深い. これ以降, 関数を測度と考えるときには, 一般論 (例えば [1] 参照) で用いられる不変測度 dV_l に対してではなく, 常に Lebesgue 測度 dV に対する密度関数と考えることにする. V は放物的相似変換に対して, 相対的不変なので, 特に問題は生じない.

さて, 合成積を評価することによって, 定理 3 を示される.

定理 3 の証明. 不等式 $\|\hat{\mu}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \le C\|\tilde{\mu}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}$ は [9, Lemma 6 (i)] から明らかである. 逆向きを示すためにまず (6) から次がなりたつことに注意する:

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\tilde{b}}\mu, \quad \tilde{b} \le C\bar{b}, \quad \mathcal{I}_{\bar{b}}\hat{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\bar{b}*\hat{a}}\mu.$$

また, 最後の式の合成積の部分は (11) および, 補題 3 (iv) から

$$\begin{aligned}\bar{b} * \hat{a}(x,t) &= \int \bar{b}(X \cdot Y^{-1})\hat{a}(Y)s^{-1}dV(Y)\\ &= \int \bar{b}(-t^{\frac{1}{2\alpha}}s^{x-\frac{1}{2\alpha}}y, s^{-1}t)\hat{a}(y,s)s^{-1}dyds\\ &= \int_{\mathrm{supp}\,\hat{a}} \left(1+s^{-1}t+|x-t^{\frac{1}{2\alpha}}s^{-\frac{1}{2\alpha}}y|^{2\alpha}\right)^{-2(\frac{n}{2\alpha}+1+m)}\frac{\hat{a}(y,s)}{s}dyds\end{aligned}$$

となる. ここで, $(x,t) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_+$ と $(y,s) \in \mathrm{supp}\,\hat{a}$ に対する評価式

$$1+s^{-1}t+t|t^{-\frac{1}{2\alpha}}x - s^{-\frac{1}{2\alpha}}y|^{2\alpha} \le C(1+t+|x|^{2\alpha}) \tag{12}$$

がなりたつことに注意する. 実際, 関数 $s^{-\frac{1}{2\alpha}}y$ の supp $\hat{a}$ 上での有界性から,

$$1+s^{-1}t+t|t^{-\frac{1}{2\alpha}}x - s^{-\frac{1}{2\alpha}}y|^{2\alpha} \le 1+ct \quad (t^{-\frac{1}{2\alpha}}|x| \le 1 \text{ のとき})$$

および,

$$|t^{-\frac{1}{2\alpha}}x - s^{-\frac{1}{2\alpha}}y| \le t^{-\frac{1}{2\alpha}}|x| + s^{-\frac{1}{2\alpha}}|y| \le ct^{-\frac{1}{2\alpha}}|x| \quad (\text{それ以外})$$

がわかり, その結果

$$1+s^{-1}t+t|t^{-\frac{1}{2\alpha}}x - s^{-\frac{1}{2\alpha}}y|^{2\alpha} \le 1+Ct+C|x|^{2\alpha}$$

となり (12) が得られる. 結局, $\bar{b} \le C\bar{b}*\hat{a}$ となり, ノルム不等式

$$\|\tilde{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \le C\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}$$

は, 補題 6 (1) の作用素 $\overline{B}$ の $L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)$ 上での有界性からしたがう. □

4 平均作用素の応用

本節では, 放物型 Bergman 空間上のいくつかの基本的な作用素を前節で導入した平均作用素あるいは放物的積分作用素としてとらえ, その有界性について議論する.

まず, Bergman 射影をとりあつかう. 本質的に [6] で示されている結果ではあるが, 証明はそこで与えられているものよりずっと簡明である.

4.1 Bergman 射影. 多重添字 $(\beta, m) \in \boldsymbol{N}_0^n \times \boldsymbol{N}_0$ に対し, 修正 Bergman 核

$$R_\alpha^{\beta,m}(X,Y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} s^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+m} \partial_x^\beta \partial_t^{m+1} W^{(\alpha)}(x-y, t+s)$$

を思い出す. ここで, $X=(x,t), Y=(y,s)$ で $W^{(\alpha)}$ は基本解である. 重要なのは斉次性

$$R_\alpha^{\beta,m}(X\cdot Y, X\cdot Z) = t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} R_\alpha^{\beta,m}(Y,Z)$$

で, これは基本解の斉次性 (4) からしたがう. したがって, この核によって定義される積分作用素 $R_\alpha^{\beta,m}$ は次のように (8) の形の放物的積分作用素とみなすことができる:

$$R_\alpha^{\beta,m} f(X) := \int f(Y) R_\alpha^{\beta,m}(X,Y) dV(Y) = \int f(X\cdot Y) R_\alpha^{\beta,m}(X_0, Y) dV(Y).$$

この場合,

$$-1 < -\frac{1}{p} + m < \left(\frac{|\beta|}{2\alpha} + m\right)$$

ならば, 補題 2 によって

$$\int s^{-\frac{1}{p}} |R_\alpha^{\beta,m}(X_0,Y)| dV(Y) \le C \int s^{-\frac{1}{p}+\frac{|\beta|}{2\alpha}+m} (1+s+|y|^{2\alpha})^{-(\frac{n}{2\alpha}+1+\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} dV(Y) < \infty$$

となるので, 次の定理が得られる.

定理 5. (cf. [6, Theorem 6.4]) $(\beta, m) \in \boldsymbol{N}_0^n \times \boldsymbol{N}_0$ に対し, 次がなりたつ:

(1) $(\beta, m) \neq (0,0)$ ならば $1 \le p < \infty$ に対し, $R_\alpha^{\beta,m}$ は $L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ 上有界である;

(2) $(\beta, m) = (0,0)$ ならば $1 < p < \infty$ に対し, $R_\alpha^{\beta,m}$ は $L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ 上有界である.

4.2 重みつき平均. 一般に, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し, V_λ で重み付き測度 $dV_\lambda(x) = t^\lambda dV(X)$ を表す. ボレル集合 $S \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ は $V_\lambda(S) < \infty$ をみたすとする. そのとき, 可測関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_\lambda)$ の重み付き平均 $\hat{\mathcal{A}}_{S,\lambda} f$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_{S,\lambda} f(X) :=& \frac{1}{V_\lambda(S)} \int_S f(X\cdot Y) dV_\lambda(Y) \\ =& \frac{1}{V_\lambda(\Phi_X S)} \int_{\Phi_X S} f(Y) dV_\lambda(Y).\end{aligned}$$

このとき, $\hat{a}_{S,\lambda}(y,s) := s^\lambda 1_S(y,s)/V_\lambda(S)$ を考えれば $\hat{\mathcal{A}}_{S,\lambda} = \mathcal{I}_{\hat{a}_{S,\lambda}}$ となる.

ここで, 補題 4 を重み付きに拡張しておく.

命題 2. 重み $\lambda \in \boldsymbol{R}$ と測度 ρ に対し, 次のノルム不等式

$$\|\mathcal{I}_\rho f\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)} \leq \Big(\int s^{-\frac{(\lambda+1)}{\sigma}} d|\rho|(y,s) \Big) \|f\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)}$$

がなりたつ. ここで, $1 \leq \sigma \leq \infty$ である.

証明. $f \in L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)$ を任意にとる.

$$\mathcal{I}_\rho f(X) = \int f(t^{\frac{1}{2\alpha}} y + x, ts) d\rho(y,s)$$

なので Minkowski の不等式から,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_\rho f\|_{L_\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)} &\leq \int \Big(\int |f(t^{\frac{1}{2\alpha}} y + x, ts)|^\sigma t^\lambda dx dt \Big)^{\frac{1}{\sigma}} d|\rho|(y,s) \\
&= \int \Big(\int |f(x,\tau)|^\sigma s^{-(\lambda+1)} \tau^\lambda dx d\tau \Big)^{\frac{1}{\sigma}} d|\rho|(y,s) \\
&= \|f\|_{L_\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)} \int s^{-\frac{(\lambda+1)}{\sigma}} d|\rho|(y,s)
\end{aligned}$$

がわかる. □

4.3 Berezin 変換. 次に, 重み付き Berezin 変換をとりあげる. $m \in \boldsymbol{N}_0$ と $1 \leq p < \infty$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し, 積分作用素

$$\tilde{B}_{m,p,\lambda} f(Y) := \frac{\int |R^m_\alpha(X,Y)|^p f(X)\, dV_\lambda(X)}{\int |R^m_\alpha(X,Y)|^p\, dV_\lambda(X)}$$

を考える. ここで, もし,

$$-1 < \lambda < \Big(\frac{n}{2\alpha} + 1\Big)(p-1) + mp = p\bigg(\Big(\frac{n}{2\alpha}+1\Big)(1 - \frac{1}{p}) + m\bigg)$$

であれば $R^m_\alpha(\,\cdot\,, Y) \in L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V_\lambda)$ で, ノルムは $\kappa = (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1) - \lambda$ とおいて

$$\int |R^m_\alpha(X,Y)|^p\, dV_\lambda(X) = C\, s^{-\kappa}$$

となる. そこであらためて一般の $\kappa \in \boldsymbol{R}$ に対し,

$$B_{m,p,\lambda,\kappa} f(Y) := s^\kappa \int |R^m_\alpha(X,Y)|^p f(X)\, dV_\lambda(X)$$

とおく．すると，これは関数 $b_{m,p,\lambda}(Y) := s^{\lambda}|R_{\alpha}^{m}(Y, X_0)|^{p}$ を用いて，

$$\begin{aligned}
B_{m,p,\lambda,\kappa}f(Y) =& s^{\kappa}\int |R_{\alpha}^{m}(X,Y)|^{p}f(X)t^{\lambda}dV(X)\\
=& s^{\kappa}\int \left|s^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}R_{\alpha}^{m}(Y^{-1}\cdot X, X_0)\right|^{p}f(X)t^{\lambda}dV(X)\\
=& s^{\kappa}\int \left|s^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}R_{\alpha}^{m}(Z, X_0)\right|^{p}f(Y\cdot Z)s^{\lambda}r^{\lambda}s^{(\frac{n}{2\alpha}+1)}dV(Z)\\
=& s^{\kappa+\lambda-(p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\mathcal{I}_{b_{m,p,\lambda}}f(Y)
\end{aligned}$$

と表される．上の変形では $Z = (z, r) := Y^{-1}\cdot X$，すなわち，$x = s^{\frac{1}{2\alpha}}z + y, t = sr$ とおいて変数変換した．その結果，$\nu := \kappa + \lambda - (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1)$ とおいて重み $\eta \in \boldsymbol{R}$ と指数 $1 \le \sigma < \infty$ に対するノルムは

$$\|B_{m,p,\lambda,\kappa}f\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})} = \|\mathcal{I}_{b_{m,p,\lambda}}f\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta+\sigma\nu})} \tag{13}$$

となる．ここで，命題 2 を用いると，次のノルム不等式が得られる．

補題 7. $m \in \boldsymbol{N}_0$, $1 \le p < \infty$, $\lambda, \kappa \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\nu := \kappa + \lambda - (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1)$ とおく．もし，指数 $1 \le \sigma < \infty$ と重み $\eta \in \boldsymbol{R}$ が条件

$$-\kappa - pm < \frac{\eta+1}{\sigma} < \lambda + 1 - \nu,$$

をみたせば，重み付きノルム不等式

$$\|B_{m,p,\lambda,\kappa}f\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})} \le C\|f\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta+\sigma\nu})}$$

が成立する．

証明．証明には，関数

$$\overline{b}_{m,p,\lambda}(x,t) := t^{\lambda}\left(1 + t + |x|^{2\alpha}\right)^{-p(\frac{n}{2\alpha}+1+\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} \tag{14}$$

とそれに対応する積分作用素

$$\overline{B}_{m,p,\lambda} := \mathcal{I}_{\overline{b}_{m,p,\lambda}}$$

を用いる．すると補題 1 により $b_{m,p,\lambda} \le C\overline{b}_{m,p,\lambda}$ なのでこの補題は，命題 2 と補題 2 からしたがう． □

もし，$\kappa = (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1) - \lambda$ であれば，

$$B_{m,p,\lambda,\kappa} = \mathcal{I}_{b_{m,p,\lambda}}$$

と表されるので，これを $B_{m,p,\lambda} := B_{m,p,\lambda,\kappa}$ と記す．このとき，次がなりたつ．

補題 8. $m \in \boldsymbol{N}_0$ とし, $1 \leq p < \infty$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\kappa := (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1) - \lambda$ とおく. もし, $1 \leq \sigma \leq \infty$ と $\eta \in \boldsymbol{R}$ が

$$-\kappa - pm < \frac{\eta+1}{\sigma} < \lambda + 1 \tag{15}$$

をみたせば, 定数 $C = \int s^{-\frac{\eta+1}{\sigma}} \overline{b}_{m,p,\lambda}(y,s) dV(y,s)$ を用いて, ノルム不等式

$$\|B_{m,p,\lambda} f\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_\eta)} \leq C \|f\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_\eta)}$$

がなりたつ.

$\eta = 0$ に対しては, 次がなりたつ.

命題 3. $1 \leq \sigma \leq \infty, 0 < p < \infty$ に対し, $\lambda > \frac{1}{\sigma} - 1$ をとり, $\kappa := (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1) - \lambda$ とおく. そして, $m \in \boldsymbol{N}_0$ は $m > -\frac{1}{p}(\kappa + \frac{1}{\sigma})$ をみたすようにとる. そのとき, 上半空間上の測度 $\mu \geq 0$ に対し,

$$C^{-1} \|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)} \leq \|B_{m,p,\lambda} \mu\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)} \leq C \|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)}$$

がなりたつ.

次に, 命題 3 の重み付き版を考察する.

命題 4. $0 < p < \infty$ に対し, $m \in \boldsymbol{N}_0$ を $m \geq \left(\frac{2}{p}-1\right)\left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)$ にとる. $1 \leq \sigma \leq \infty$, $-\frac{1}{\sigma} < \lambda \leq 0$ とする. そのとき, 上半空間上の測度 $\mu \geq 0$ に対し,

$$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l) \Longleftrightarrow B_{m,p,\lambda} \mu \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)$$

である. 特に, $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)$ は $\tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)$ と同値になる.

補題 9. $m \in \boldsymbol{N}_0$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda, \tau, \eta \in \boldsymbol{R}$, $1 \leq \sigma \leq \infty$ とし, $K \subset \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ はコンパクトとする. そのとき, 上半空間上の正測度 μ に対し,

$$\|\hat{\mathcal{A}}_{K,\tau} \mu\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_\eta)} \leq C \, \|B_{m,p,\lambda} \mu\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_\eta)}$$

がなりたつ.

証明. 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ の相対コンパクト開集合 $U_m \neq \emptyset$ と $\delta > 0$ を U_m 上

$$|R_\alpha^m(\,\cdot\,, X_0)| \geq \delta$$

となるようにとることができる. すると, $Y^{-1} \cdot X \in U_m$ なら

$$|R_\alpha^m(X,Y)| \geq s^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} \delta$$

である. したがって, $\kappa := (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1)-\lambda$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
B_{m,p,\lambda}\mu(Y) &= s^{\kappa}\int |R_{\alpha}^{m}(X,Y)|^{p} t^{\lambda}\, d\mu(X) \\
&\geq s^{\kappa} s^{-p(\frac{n}{2\alpha}+1)} \delta^{p} \int_{\Phi_Y U_m} t^{\lambda}\, d\mu(X) \\
&= \delta^{p} s^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)-\lambda} V_{\lambda}(\Phi_Y U_m) \hat{\mathcal{A}}_{U,\lambda}\mu(Y)
\end{aligned}
$$

となる. そして, $V_{\lambda}(\Phi_Y U_m) = \int_{\Phi_Y U_m} t^{\lambda}\, dV(X) = s^{\lambda+(\frac{n}{2\alpha}+1)} \int_{U_m} dV_{\lambda}(X)$ であるので,

$$
B_{m,p,\lambda}\mu \geq \delta^{p} \hat{\mathcal{A}}_{U,\lambda}\mu \tag{16}
$$

がわかり, 補題が示される. □

逆向きには. 可積分条件が必要である.

補題 10. $U \neq \emptyset$ を上半空間 $\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}$ の相対コンパクト開集合とする. $m \in \boldsymbol{N}_0$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda, \tau \in \boldsymbol{R}$ とし, $\kappa := (p-1)(\frac{n}{2\alpha}+1)-\lambda$ とおく. $1 \leq \sigma \leq \infty$ と $\eta \in \boldsymbol{R}$ は条件

$$
-\kappa - pm < \frac{\eta+1}{\sigma} < \lambda + 1
$$

をみたすとする. そのとき,

$$
\|\overline{B}_{m,p,\lambda}\mu\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})} \leq C \|\hat{\mathcal{A}}_{U,\tau}\mu\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})}
$$

がなりたつ.

証明. 注意 4 により,

$$
\overline{B}_{m,p,\lambda}\hat{\mathcal{A}}_{U,\tau}\mu = \mathcal{I}_{\overline{b}_{m,p,\lambda} * \hat{a}_{U,\tau}}\mu
$$

となるが, 合成積の部分を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\overline{b}_{m,p,\lambda} * \hat{a}_{U,\tau}(x,t) &= \int \overline{b}_{m,p,\lambda}(X \cdot Y^{-1}) \hat{a}_{U,\tau}(Y) s^{-1} dV(Y) \\
&= \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^{\lambda} \left(1 + s^{-1}t + |x - t^{\frac{1}{2\alpha}} s^{-\frac{1}{2\alpha}} y|^{2\alpha}\right)^{-p(\frac{n}{2\alpha}+1+\frac{|\beta|}{2\alpha}+m)} \frac{\hat{a}_{U,\tau}(y,s)}{s}\, dV(y,s)
\end{aligned}
$$

となる. (12) から, 上式は下から $C^{-1}\overline{b}_{m,p,\lambda}(x,t)$ でおさえられる. したがって, 補題 8 により

$$
C^{-1}\|\overline{B}_{m,p,\lambda}\mu\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})} \leq \|\overline{B}_{m,p,\lambda}\hat{\mathcal{A}}_{U,\tau}\mu\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})} \leq C\|\hat{\mathcal{A}}_{U,\tau}\mu\|_{L^{\sigma}(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1},V_{\eta})}
$$

が示される. □

命題 3 および命題 4 の証明. 可積分条件 (15) を調べればよい. 命題 3 に関しては, 何もないので, 命題 4 を考察する. $\eta = -(\frac{n}{2\alpha}+1)$ の場合, 仮定から $\frac{\eta+1}{\sigma} \leq 0 < \lambda+1$ となり, (15) の 2 番目の不等式はいつでも成立している. 1 番目の不等式は

$$\lambda + \left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\sigma}-p+1\right) < pm + \frac{1}{\sigma}$$

と同値であるが, $1 \leq \sigma < \infty$ のときは, $(\frac{n}{2\alpha}+1)(\frac{1}{\sigma}-p+1) \leq (\frac{n}{2\alpha}+1)(2-p) \leq pm$, また $1 < \sigma \leq \infty$ のときは $(\frac{n}{2\alpha}+1)(\frac{1}{\sigma}-p+1) < (\frac{n}{2\alpha}+1)(2-p) \leq pm$ となるので, いずれの場合も (15) がなりたつことが確かめられる. □

ここで, 定理 4 を証明する.

定理 4 の証明. 定理の前半は命題 4 で示されているので, 後半のコンパクト性を問題にする. 定理 2 から $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ を示せばよいが, そのために $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ で $\varphi \geq 0, \varphi(X_0) > 0$ をみたすものを 1 つとり $\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)} \in L_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V)$ を示せばよい. なぜなら, $\hat{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\hat{a}}\,\mu$ なので, $\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_{\varphi * \hat{a}}\,\mu$ となるが, $\varphi(X_0) > 0$ から $\inf_{Q^{(\alpha)}(X_0)} \varphi * \hat{a} > 0$ がわかり, $\hat{\mu}^{(\alpha)} \leq C\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)}$ となるからである.

そこで, $\varepsilon > 0$ を任意にとり固定する. $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ の可積分性から, $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ のコンパクト集合 K で

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}\setminus K} (\hat{\mu}^{(\alpha)})^\sigma \, dV^l < \varepsilon$$

となるものをとることができる. ここで,

$$K_0 := K \cdot (\mathrm{supp}\ \varphi)^{-1} = \{X \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}; \left(\Phi_X(\mathrm{supp}\ \varphi)\right) \cap K \neq \emptyset\}$$

とおくと, K_0 もコンパクトである. そして $\varphi^l(y,s) := s^{\frac{n}{2\alpha}+1}\varphi(y,s)$ とおいて, $X \in \boldsymbol{R}_+^{n+1} \setminus K_0$ における値を評価する.

$$\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)}(X) = \int \varphi(Y)\, \hat{\mu}^{(\alpha)}(X\cdot Y)\, dV(Y) = \int \varphi^l(Y)\, f(X\cdot Y)\, dV_l(Y)$$

なので, V_l が不変測度であることに注意して Hölder の不等式を用いると,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)}(X)\right)^\sigma &\leq \|\varphi^l\|^\sigma_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)} \int_{\mathrm{supp}\ \varphi} \left(\hat{\mu}^{(\alpha)}(X\cdot Y)\right)^\sigma dV_l(Y) \\
&= \|\varphi^l\|^\sigma_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)} \int_{\Phi_X(\mathrm{supp}\ \varphi)} \left(\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y)\right)^\sigma dV_l(Y) \\
&\leq \|\varphi^l\|^\sigma_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)} \int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}\setminus K} \left(\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y)\right)^\sigma dV_l(Y) \\
&\leq \varepsilon \|\varphi^l\|^\sigma_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V_l)}
\end{aligned}$$

が得られ, 証明が完了する. □

本節における重み付き Berezin 変換に関するノルム不等式は Orlicz 空間上のノルム不等式に一般化され, Orlicz 型 Schatten 族の Toeplitz 作用素の特徴付けに応用される. 詳しくは, [13] を参照.

4.4 Carleson うめこみと Toeplitz 作用素. 最後に, $q<p$ の場合の Toeplitz 作用素を考察する. まず, Carleson うめこみから始める.

定理 6. μ を上半空間上の正測度とする. $1\le q<p<\infty$ に対し, $\sigma:=p/q\in(1,\infty)$ とおき σ' をその共役指数とする. もし, $\hat{\mu}^{(\alpha)}\in L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)$ ならば, $u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対してノルム不等式

$$\|u\|_{L^q(\boldsymbol{R}_+^{n+1},\mu)}\le C\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|^{1/q}_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)}\cdot\|u\|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)}$$

がなりたつ. ここで, 定数 $C>0$ は μ および u に依存しない. また, そのとき, *Carleson* うめこみ $\iota_{\mu.p.q}:L^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V)\to L^q(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V):u\mapsto u$ はコンパクトになる.

証明. $u\in\boldsymbol{b}_\alpha^p$ を任意にとる. まず, $q>1$ の場合を考える. そのとき, $\lambda<0$ を $\lambda q/q'>(1/\sigma)-1$ となるようにとることができる. なぜなら, $q/q'=q-1>0$, $(1/\sigma)-1=-q/p<0$ だからである. 再生核の性質

$$u(X)=\int s^{-\lambda/q'}s^{\lambda/q'}u(X\cdot Y)R_\alpha(X_0,Y)\,dV(Y)$$

に Hölder の不等式を用いると,

$$\begin{aligned}|u(X)|&\le\Big(\int s^{-\lambda q/q'}|u(X\cdot Y)|^q|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int s^{\lambda}|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{q'}}\\&=\Big(\int t^{\lambda q/q'}s^{-\lambda q/q'}|u(Y)|^q|R_\alpha(X,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int s^{\lambda}|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{q'}}\end{aligned}$$

を得る. そこでもう一度 Hölder の不等式を使えば,

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{L^q(\boldsymbol{R}_+^{n+1},\mu)}\le&\Big(\int s^{\lambda}|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{q}{q'}}\\&\times\int|u(Y)|^q\Big(s^{-\lambda q/q'}\int t^{\lambda q/q'}|R_\alpha(X,Y)|\,d\mu(X)\Big)\,dV(Y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \Big(\int s^{\lambda}|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{q}{q'}} \\
&\quad \times \Big(\int |u(Y)|^{q\sigma'}\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{\sigma'}} \Big(\int |B_{1,\lambda q/q'}\mu(Y)|^{\sigma}\,dV(Y)\Big)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \Big(\int s^{\lambda}|R_\alpha(X_0,Y)|\,dV(Y)\Big)^{\frac{q}{q'}} \cdot \|u\|^q_{L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \cdot \|B_{1,\lambda q/q'}\mu\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}
\end{aligned}
$$

となる. この場合, 命題 3 および補題 2 の条件はみたされているので, 命題 3 によって定理は証明される.

次に, $q=1$ とする. そのとき,

$$u(X) = \int u(X)R_\alpha(X,Y)\,dV(Y)$$

からただちに

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,\mu)} &\le \int |u(Y)|\Big(\int |R_\alpha(X,Y)|\,d\mu(X)\Big)dV(Y) \\
&\le \|u\|_{L^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,\mu)} \cdot \|B_1\mu\|_{L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}
\end{aligned}
$$

がわかる. したがって, 命題 3 から定理のノルム不等式が得られる.

最後にコンパクト性であるが, $\sigma=\infty$ のときと異なり, $1\le\sigma<\infty$ の場合には

$$L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V) = L^\sigma_0(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V) := \overline{\{f\in L^\sigma(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V);\mathrm{supp}\, f \text{ がコンパクト}\}}$$

となることからわかる. なぜなら, Carleson うめこみ $\iota_{\mu,p,q}$ は supp μ がコンパクトならいつでもコンパクトであるからである ([11]). □

次に, Toeplitz 作用素を考える.

定理 7. $1<q<p<\infty$ に対し, $\tau := \frac{1}{p}+\frac{1}{q'}<1$ とおく. ここで, q' は q の共役指数である. そのとき, 増大条件 (2) をみたす上半空間上の正測度 μ が $\hat{\mu}^{(\alpha)}\in L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)$ をみたせば, *Toeplitz* 作用素 $T_{\mu,p,q}:\boldsymbol{b}^p_\alpha\to\boldsymbol{b}^q_\alpha$ はコンパクトで, ノルム評価

$$\|T_{\mu,p,q}\| \le C\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}$$

がなりたつ.

証明. $X\in\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ を任意に固定し, $v:=R_\alpha(X,\,\cdot\,)$ とおく. すると, $v\in\boldsymbol{b}^{q'}_\alpha$ である. まず, 定理 6 によって, 2 つの Carleson うめこみ $\iota_{\mu,p,\tau p}$ と $\iota_{\mu,q',\tau q'}$ が有界であることに注意する. すると, 各 $u\in\boldsymbol{b}^p_\alpha$ に対し, Toeplitz 作用素

$$T_\mu u(X) := \int R_\alpha(X,Y)\,u(Y)\,d\mu(Y)$$

が, 定義可能となる. また, $\tau q' = (\tau p)'$ に注意して, $w := \iota^*_{\mu,q',\tau q'} \cdot \iota_{\mu,p,\tau p} u \in \boldsymbol{b}^q_\alpha$ とおくことができる. そのとき,

$$\begin{aligned} w(X) &= \int R_\alpha(X,Y)\, w(Y)\, dV(Y) = \langle v, w\rangle_{(\boldsymbol{b}^{q'}_\alpha, \boldsymbol{b}^q_\alpha)} \\ &= \langle \iota_{\mu,q',\tau q'} v, \iota_{\mu,p,\tau p} u\rangle_{(L^{\tau q'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,\mu), L^{\tau p}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,\mu))} \\ &= \int R_\alpha(X,Y)\, u(Y)\, d\mu(Y) = T_\mu u(X) \end{aligned}$$

となるが, これは $T_{\mu,p,q} = \iota^*_{\mu,q',\tau q'} \cdot \iota_{\mu,p,\tau p}$ を示している. したがって, 定理 6 からコンパクト性がわかり, ノルム評価も定理 6 のノルム評価から示される:

$$\begin{aligned} \|T_{\mu,p,q}\| &\le \|\iota_{\mu,q',\tau q'}\| \cdot \|\iota_{\mu,p,\tau p}\| \le C \|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|^{1/\tau q'}_{L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \cdot \|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|^{1/\tau p}_{L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \\ &= \|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)}. \end{aligned}$$

□

上の議論によって, Carleson うめこみと Toeplitz 作用素の形式的な関係 $T_\mu = \iota^*_\mu \cdot \iota_\mu$ が正当化されている. 古典的な設定 $B^2(\boldsymbol{D})$ における類似の関係については [4] で触れられている.

5 補足

本論では, われわれの放物型 Bergman 空間の研究を放物型相似変換を中心にまとめてみた. その方法論にこだわるあまり説明できなかった関連する最近の結果を補足の意味でここで紹介して, 締めくくりとしたい.

Carleson うめこみに関して, 定理 6 の逆が成立する. 証明には, 補間点列の理論 ([12]) が用いられる.

定理 8. (cf. [14, Proposition 4.4]) $1 \le q < p < \infty$ に対し, $\sigma := p/q \in (1,\infty)$ とおき, σ' をその共役指数とする. 上半空間上の正測度 μ に対する *Carleson* うめこみ $\iota_{\mu.p.q}$ が有界ならば, $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+, V)$ で, ノルム不等式

$$\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^{\sigma'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+,V)} \le C \|\iota_{\mu,p,q}\|^q$$

が成立する.

Toeplitz 作用素に関しては, 次のように, $q = p'$ となる特別な場合にしか定理 7 の逆の主張は得られていない. 一般の場合に関しては, 今後の課題として残されている.

定理 9. (cf. [14, Theorem 6.2]) $2 < p < \infty$ に対し，$\tau := 2/p$ とおく．(2) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し，*Toeplitz* 作用素 $T_{\mu,p,p'}$ が有界ならば，$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_{+}, V)$ で

$$\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^{(1/\tau)'}(\boldsymbol{R}^{n+1}_{+}, V)} \leq C\|T_{\mu,p,p'}\|$$

がなりたつ．ここで，$(1/\tau)' = p/(p-2)$ である．

References

[1] C.-H. Chu and A.T.-M. Lau, Harmonic functions on groups and Fourier algebras, Lecture Notes in Math., **1782**, Springer, 2002.

[2] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, *Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces*, Potential Analysis, **17** (2002), 307–335.

[3] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima Math. J., **38** (2008), 471–488.

[4] D. H. Luecking, *Trace ideal criteria for Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., **73** (1987), 345–368.

[5] G. MacDonald and C. Sundberg, *Toeplitz operators on the disc*, Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 595–611.

[6] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.

[7] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *L^p-boundedness of Bergman projections for α-parabolic operators*, Advanced Stusies Pure Math., **44** (2006), 305–318.

[8] M. Nishio and N. Suzuki, *A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α*, New Zealand J. Math., **29** (2000), 47–54.

[9] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J., **36** (2007), 563–583.

[10] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, 放物型 *Bergman* 空間上の *Toeplitz* 作用素, 数理解析研究所講究録, **1553** (2007), 181–195.

[11] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima Math. J., **38** (2008), 177–192.

[12] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces*, Potential Analysis, **28** (2008), 357–378.

[13] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Weighted Berezin transformations with application to Toeplitz operators of Schatten class on parabolic Bergman spaces*, Kodai Math. J., **32** (2009), 501–520.

[14] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces*, to appear in Tohoku Math. J..

[15] M. Nishio and M. Yamada, *Carleson type measures on parabolic Bergman spaces*, J. Math. Soc. Japan, **58**, No. 1 (2006), 83–96.

[16] G. Rozenblum, *Finite rank Toeplitz operators in Bergman spaces*, arXiv: 0904.0171v1 [math.FA], 1 Apr. 2009.

Masaharu Nishio
Department of Mathematics
Osaka City University
Sugimoto, Sumiyoshi
Osaka 558-8585, Japan
nishio@sci.osaka-cu.ac.jp

Noriaki Suzuki
Department of Mathematics
Meijo University
Tenpaku-ku, Nagoya 468-8502, Japan
suzukin@ccmfs.meijo-u.ac.jp

Masahiro Yamada
Department of Mathematics
Faculty of Education
Gifu University
Yanagido 1-1, Gifu 501-1193, Japan
yamada33@cc.gifu-u.ac.jp